Projet de thèse « Filtrations Facteurs et systèmes d'entropie positive »

Résumé du projet

Ce projet de thèse se situe au confluent de la théorie des probabilités et de la théorie ergodique. Il s'agit d'une part de développer une nouvelle classification (dite « dynamique ») des filtrations d'un espace de probabilité, en tenant compte de l'action d'une transformation de cet espace qui préserve la mesure et chacune des sous-tribus de la filtration. Cette classification dynamique a été initiée en 2020 dans la thèse de Paul Lanthier [5], et de nombreuses questions ouvertes sont posées à son sujet.

On compte ensuite appliquer la classification dynamique à l'étude de filtrations spéciales, présentes dans chaque système dynamique ergodique et d'entropie positive, que l'on appelle ici les « filtrations Pinsker faible ». L'existence de ces filtrations découle du résultat spectaculaire d'Austin [1] qui prouve qu'un tel système possède toujours la propriété suivante (dite *Pinsker faible*) : il peut être décomposé en le produit direct d'un schéma de Bernoulli avec un système d'entropie arbitrairement petite. En itérant cette décomposition sur le facteur d'entropie petite, on obtient l'existence d'une suite ordonnée de tribus facteur dans laquelle l'entropie est successivement divisée par 2. L'étude d'une telle filtration peut apporter beaucoup d'informations sur la structure du système dynamique sous-jacent, notamment sur son caractère Bernoulli ou non.

Enfin on projette de s'intéresser aux systèmes d'entropie positive entrant dans la catégorie des suspensions de Poisson (action d'une transformation sur les configurations d'un processus de Poisson). Motivés par la question de savoir si l'on peut trouver une suspension de Poisson qui soit K mais non Bernoulli, on pourra notamment tenter d'étudier leurs filtrations Pinsker faible.

Projet détaillé

Classification dynamique des filtrations facteurs

On s'intéresse à des filtrations en temps négatifs, qui sont des suites croissantes $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \le 0}$ de sous-tribus d'un espace de probabilité.

Étant donné un processus stochastique $X = (X_n)_{n \le 0}$, indexé par les entiers négatifs et défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, la *filtration* engendrée par X est la suite croissante $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \le 0}$ de sous-tribus de $\mathscr{A}$, où pour chaque n la tribu $\mathscr{F}_n$ est celle engendrée par le processus jusqu'au temps n : $\mathscr{F}_n = \mathbf{\Sigma}(X_m : m \le n)$. Cette filtration est l'objet mathématique représentant l'acquisition de l'information au fur et à mesure de la réalisation du processus depuis $-\infty$. Mais bien sûr il n'y a pas unicité du processus engendrant une filtration donnée. Deux telles filtrations, éventuellement définies sur deux espaces de probabilité différents, sont dites isomorphes si elles peuvent être engendrées par des processus de même loi. Ainsi la question de la classification de ces filtrations, initiée par Vershik dans les années 1970 (mais seulement diffusée dans les années 1990 [11]), revient grosso modo au problème suivant : étant donnée une filtration $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \le 0}$, quel est le processus « le plus simple » qui l'engendre ?

Dans ce cadre, la structure la plus simple possible correspond au cas d'une filtration engendrée par une suite de variables aléatoires indépendantes : on parle alors de *filtration de type produit*. Vershik a également introduit la notion un peu plus générale de filtration *standard*, ce qui signifie que la filtration dont il est question peut être immergée dans une filtration de type produit.

Les idées de Vershik, reprises puis développées par d'autres auteurs (voir notamment [2, 10, 8]) ont permis la découverte de différents critères pour reconnaître la standardité d'une filtration. On citera notamment ici le *I-confort*, introduit par Émery et Schachermayer [3, 6], caractérisé par l'existence de certaines formes de couplages de deux copies de la filtration, indépendantes pour des temps lointains mais finissant par se rapprocher pour les temps proches de 0.

Dans la récente thèse de Paul Lanthier [5] a été entreprise l'étude de processus aléatoires provenant d'automates cellulaires sous l'angle des filtrations engendrées par ces processus. En utilisant notamment le critère de I-confort mentionné ci-dessus, il prouve que les filtrations correspondantes sont standard. Néanmoins le cadre particulier dans lequel s'effectue ce travail apporte un éclairage nouveau sur la classification des filtrations : en effet les processus dont il y est question sont définis sur des espaces symboliques, sur lesquels agit toujours le décalage σ des coordonnées vers la gauche. Comme ce décalage préserve la mesure de probabilité sous-jacente, les filtrations sont définies ici sur un système dynamique mesuré $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}, \sigma)$. De plus, les automates cellulaires commutant avec σ, toutes les tribus constituant les filtrations sont σ-invariantes : ce sont des *tribus facteurs*. Il est alors proposé dans la thèse de Paul Lanthier d'étudier ces filtrations en tenant compte de ce cadre dynamique apporté par σ. Il s'agit alors de classifier non pas de simples filtrations, mais des filtrations facteurs de la forme $(\mathscr{F}, T)$, où T est un automorphisme de l'espace de probabilité sous-jacent, et chaque tribu $\mathscr{F}_n$ est T-invariante.

Les notions de *filtration de type produit* et de *filtration standard* se traduisent naturellement dans ce cadre dynamique. Une version dynamique du critère de I-confort est également proposée dans [5], où il est prouvé que ce I-confort dynamique est au moins nécessaire à la standardité dynamique. Or il est montré que l'une des filtrations étudiées, qui est de type produit au sens défini par Vershik, ne vérifie pas ce critère de I-confort dynamique et n'est donc pas dynamiquement standard.

Parmi les questions qui peuvent être abordées sur ce sujet, on peut mettre en avant celle de trouver des critères de standardité dynamique pour une filtration facteur. Notamment on tentera dans le cadre de cette thèse de déterminer si le I-confort dynamique entraîne la standardité dynamique. Dans le cadre usuel de la classification des filtrations, l'un des outils pour montrer que le I-confort entraîne la standardité est l'existence de « superinnovations », c'est-à-dire d'une suite de tribu indépendantes $(\mathscr{U}_n)$, où $\mathscr{U}_n$ est indépendante de $\mathscr{F}_{n-1}$, et $\mathscr{F}_n$ est contenue dans la tribu engendrée par $\mathscr{F}_{n-1}$ et $\mathscr{U}_n$. Or dans le cadre dynamique l'existence de telles superinnovations est beaucoup moins claire, et on essaiera au travers de l'analyse d'exemples de comprendre ce phénomène. On tentera aussi de voir s'il existe des exemples de filtrations facteurs qui soient dynamiquement standard sans être dynamiquement de type produit.

Étude de filtrations Pinsker faible

Après que Ornstein [7] ait invalidé la conjecture de Pinsker, suivant laquelle tout système ergodique se décomposerait comme produit direct d'un schéma de Bernoulli avec un système d'entropie nulle, Thouvenot [9] a introduit dans les années 1970 la propriété de *Pinsker faible* : un système dynamique $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}, T)$ (où T est une transformation inversible de Ω qui préserve la probabilité $\mathbb{P}$) possède cette propriété s'il est isomorphe au produit direct d'un schéma de Bernoulli avec un système d'entropie arbitrairement petite.

L'existence de systèmes ergodiques non Pinsker faible est restée ouverte jusqu'en 2018, année où Austin [1] démontre que tout système ergodique possède cette propriété.

En partant d'un système ergodique $(\Omega, \mathscr{F}_0, \mathbb{P}, T)$ d'entropie strictement positive (disons d'entropie au moins 1), on peut commencer par trouver dans ce système une tribu facteur $\mathscr{F}_{-1}$ d'entropie $1/2$ possédant un complément indépendant isomorphe à un schéma de Bernoulli. Mais comme le facteur défini par $\mathscr{F}_{-1}$ a lui-même la propriété de Pinsker faible, on trouve une sous-tribu facteur $\mathscr{F}_{-2} \subset \mathscr{F}_{-1}$ ayant dans $\mathscr{F}_{-1}$ un complément indépendant Bernoulli, et d'entropie $1/4$. En continuant ainsi récursivement, on aboutit à la construction d'une filtration facteur $\left(\mathscr{F}_n\right)_{n\leq 0}$, où pour tout $n \leq -1$, l'entropie du facteur défini par $\mathscr{F}_n$ vaut 2^n, et $\mathscr{F}_n$ possède dans $\mathscr{F}_{n-1}$ un complément indépendant Bernoulli. Une telle filtration facteur est appelée *filtration Pinsker faible*. On peut assez facilement se convaincre que le système initial est isomorphe à un schéma de Bernoulli si et seulement si il existe une filtration Pinsker faible de type produit. Le système a la propriété K si et seulement si ses filtrations Pinsker faible sont kolmogoroviennes, c'est-à-dire si leur tribu asymptotique $\bigcap_{n\leq 0} \mathscr{F}_n$ est triviale. Ainsi les propriétés des filtrations Pinsker faible renseignent sur la structure du système dynamique dans lequel elles sont construites.

On projette dans cette thèse de mieux comprendre les filtrations Pinsker faible d'un système donné. Notamment, on essaiera de déterminer si toutes les filtrations Pinsker faible d'un système donné sont forcément isomorphes. On essaiera aussi de construire un exemple de système K mais non Bernoulli dans lequel on peut expliciter une filtration Pinsker faible qui ne soit pas de type produit.

Suspensions de Poisson avec la propriété K

Les suspensions de Poisson sont des systèmes dynamiques d'origine probabiliste, qui constituent un pont entre la théorie ergodique en mesure infinie et celle en mesure finie : partant d'un système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ où μ est une mesure σ-finie, on lui associe la suspension de Poisson $(X^*, \mathscr{A}^*, \mu^*, T_*)$, où X^* est l'ensemble des configurations dénombrables de points de X localement finies, μ^* est la mesure de probabilité sur X^* définie comme la loi d'un processus de Poisson sur X d'intensité μ, et T_* est la transformation qui applique simultanément T à tous les points de la configuration.

Les suspensions de Poisson partagent avec d'autres systèmes probabilistes, les systèmes gaussiens, de nombreux points communs [4]. Les systèmes gaussiens ayant la propriété K sont parfaitement connus : ils sont tous isomorphes au schéma de Bernoulli d'entropie infinie. Mais la description des suspensions de Poisson ayant la propriété K est encore un problème largement ouvert. En particulier, l'existence ou non d'une suspension de Poisson ayant la propriété K sans être isomorphe à un schéma de Bernoulli est une question importante sur laquelle on ne sait encore rien. L'étude de filtrations facteurs dans les suspensions de Poisson (en particulier de leurs filtrations Pinsker faible) pourrait amener à quelques progrès sur cette question.

Références

[1] Tim Austin : Measure concentration and the weak Pinsker property. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 128:1–119, 2018.

[2] Lester Dubins, Jacob Feldman, Meir Smorodinsky et Boris Tsirelson : Decreasing sequences of σ-fields and a measure change for Brownian motion. I. *Ann. Probab.*, 24(2):882–904, 1996.

[3] M. Émery et W. Schachermayer : On Vershik's standardness criterion and Tsirelson's notion of cosiness. *In Séminaire de Probabilités XXXV*, pages 265–305. Berlin : Springer, 2001.

[4] Élise Janvresse, Emmanuel Roy et Thierry de la Rue : Dynamical Systems of Probabilistic Origin : Gaussian and Poisson Systems. *In Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. 2020.

[5] Paul Lanthier : *Aspects ergodiques et algébriques des automates cellulaires.* Thèse de doctorat, Université de Rouen Normandie, 2020.

[6] Stéphane Laurent : On standardness and I-cosiness. *In Séminaire de Probabilités XLIII, Poitiers, France, Juin 2009.*, pages 127–186. Berlin : Springer, 2011.

[7] Donald S. Ornstein : A mixing transformation for which Pinsker's conjecture fails. *Adv. Math.*, 10:103–123, 1973.

[8] Meir Smorodinsky : Processes with no standard extension. *Isr. J. Math.*, 107:327–331, 1998.

[9] J.-P. Thouvenot : On the stability of the weak Pinsker property. *Isr. J. Math.*, 27:150–162, 1977.

[10] B. Tsirelson : Triple points : From non-Brownian filtrations to harmonic measures. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6):1096–1142, 1997.

[11] A. M. Vershik : The theory of decreasing sequences of measurable partitions. *St. Petersbg. Math. J.*, 6(4):1–68, 1994.